Yhdistetty funktio, yhdistetyn funktion derivaatta ja juurifunktion derivaatta lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Niilo Paavola
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisältö

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopisto oppikirjaprojektia. Oppikirjaprojektin tarkoitus on tuottaa vuonna 2021 voimaan tulevan *Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019* [11] mukaista vapaaseen käyttöön suunnattua materiaalia. Tässä projektissa tehdään oppimateriaalia MAA6 derivaatta-moduulia varten, ja tämä tutkielma on yksi seitsemästä projektiin osallistuvasta tutkielmasta. Tuotettu oppimateriaali sopii niin opettajien käytettäväksi kuin myös opiskelijoiden itseopiskelumateriaaliksi.

Oppikirjan sisältöön vaikuttavat opetussuunnitelman lisäksi merkittävästi kaksi eri artikkelia. Nämä koko oppikirjaan vaikuttavat artikkelit ovat *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* [2] ja *Collaborative learning in mathematics* [15]. Näiden artikkeleiden avulla pyrimme luomaan johdonmukaisen kokonaisuuden, joka vastaa sekä tämän päivän että tulevaisuuden tarpeisiin matematiikan saralla. Oppikirjaprojektin keskeinen tavoite on lisätä opiskelijoiden omaa päättelyä uusien asioiden oppimisessa.

Tämän tutkielman alussa perustellaan oppimateriaalin tuottamisessa tehdyt valinnat tieteellisiin artikkeleihin nojaten. Perustelujen jälkeen seuraa oppikirjan materiaali kolmeen osaan jaettuna. Nämä osat ovat yhdistetty funktio, yhdistetyn funktion derivaatta ja juurifunktion derivaatta. Materiaalin jälkeen seuraa opettajan opas, jossa avataan pohdintatehtävien tavoitteita ja annetaan niihin vastaukset. Tutkielman lopussa on harjoitustehtävien vastaukset.

2 Oppikirjan tavoitteet

Tämän oppikirjan tavoitteena on auttaa opiskelijoita hyödyntämään aktiivista lähestymistapaa matematiikan opiskeluun. Oppikirjan ideana on, että opiskelijat pääsevät päättelemään ja tuottamaan matemaattisia sääntöjä. Tavoitteena on, että näin oppiminen on tehokkaampaa, kokonaisvaltaisempaa ja antaa opiskelijalle paremmat valmiudet tulevaisuuteen. Oppikirja noudattaa lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 laaja-alaisia tavoitteita, matematiikan oppiaineen yleisiä tavoitteita ja derivaattamoduulin tavoitteita. Lisäksi oppikirjassa pyritään vastaamaan onnistuneesti kahden eri matematiikan opetusta käsittelevän artikkelin huomioihin siitä, mihin suuntaan matematiikan opetusta tulisi kehittää. Ensimmäisessä artikkelissa käsitellään ajattelun taitoja, joita tämän oppikirjan avustuksella pyritään mahdollistamaan opiskelijoille. Toisessa artikkelissa käsitellään tehtävätyyppejä, joiden avulla matematiikan opettaminen on tehokkaampaa. Näiden tavoitteiden lisäksi tässä tutkielmassa pyritään vastaamaan myös muiden tutkielman aihetta koskevien tieteellisten artikkeleiden huomioihin matematiikan oppimisesta.

2.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019

Lukion opetussuunnitelman perusteiden [11] mukaan matematiikan opiskelun tulee antaa opiskelijalle valmiudet tuottaa, soveltaa ja ymmärtää matemaattista tietoa. Ymmärtämisen lisäksi matematiikan opiskelun tulee antaa valmiuden myös matemaattisen tiedon arviointiin [11]. Näiden kaikkien valmiuksien synnyttäminen vaatii huolellisesti suunniteltua opetusta. Matematiikan opetuksen tulee myös ohjata opiskelijoita käyttämään matemaattista ilmaisua puhuttuna, kirjoitettuna ja muilla tavoin [11]. Tästä syystä tämän tutkielman pohdintatehtävät on suunniteltu siten, että niiden toteuttaminen esimerkiksi pienissä ryhmissä tai koko opetusryhmän kesken onnistuu helposti. Näin on helppo harjoitella myös matematiikan kielen puhumista. Matematiikan opiskelun tulee myös kehittää opiskelijoiden taitoa hyödyntää tietokoneohjelmistoja [11]. Tässä tutkielmassa käytetään GeoGebraa joissakin pohdinnoissa. Lisäksi esimerkiksi soveltavissa harjoitustehtävissä opiskelijat voivat hyödyntää tietokoneohjelmistoja ratkaisujen keksimisen tukena.

Vuorovaikutusosaaminen on tämän tutkielman kannalta keskeisin matematiikan opetukseen liittyvistä laaja-alaisista osaamisen tavoitteista. Matematiikan opetuksessa vuorovaikutusosaamisen vahvistaminen näkyy sekä vaihtelevina työtapoina että ryhmätyöskentelyn ja yksin työskentelyn monipuolisuutena [11]. Matematiikan opetuksen tulisi saada opiskelijat esittämään kysymyksiä ja perustelemaan omia päätelmiään [11]. Yksi tämän kirjan keskeinen tavoite onkin saada opiskelijat aktiivisiksi toimijoiksi matematiikan tunneilla.

Lukion matematiikan opetuksen yleisissä tavoitteissa on kolme tämän tutkielman kannalta keskeistä tavoitetta. Keskeiset yleiset tavoitteet ovat, että opiskelija

- rakentaa matemaattista pohjaa jatko-opinnoilleen
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla ja tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta, laatimaan perusteluja sekä

arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä

- kykenee seuraamaan matemaattista esitystä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, perustelemaan väitteitä ja arvioimaan eri muodoissa tarjottua informaatiota.

Nämä tavoitteet näkyvät tutkielmassa ennen kaikkea useina todistus ja perustelutehtävinä. Derivaatta-moduulin tavoitteista tutkielmassani pyritään vastaamaan erityisesti siihen, että opiskelija

- kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- osaa derivoida yhdistettyjä funktioita
- hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä.

Yksinkertaisten funktioiden derivointia harjoitellaan juurifunktioiden derivoinnissa ja yhdistetyn funktion derivaatta on yksi tutkielmani kolmesta pääaiheesta. Funktioiden kulun tutkimista ja ääriarvojen määrittämistä harjoitellaan pitkin tutkielmaa harjoitustehtävissä.

2.2 Ajattelun taidot

Ensimmäinen artikkeli, joka vaikuttaa tämän kirjan sisältöön merkittävästi on Cuocon, Goldenbergin ja Markin kirjoittama *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* [2]. Kyseisessä artikkelissa esitetään, millaisia ajattelun taitoja matemaatikolla tai matematiikan opiskelijalla pitäisi olla. Artikkelissa esiteltävät ajattelun taidot ovat säännönmukaisuuksien etsintä, kokeilu, kuvailu, nikkarointi, keksiminen, visualisointi, otaksuminen ja arvaaminen. Tässä kirjassa halutaan edistää erityisesti kolmea näistä ajattelun taidoista. Kirjan avulla opiskelijoiden tulisi pystyä kehittämään taitojaan kokeilijoina, kuvailijoina ja visualisoijina.

Kokeilemisessa ei ole kyse vain arvaamisesta vaan ennemminkin hyväksi todettujen ratkaisutapojen kokeilusta ja erilaisten parametrien muutosten vaikutusten tutkimisesta [2]. Tavoitteena on, että pohdintojen ja harjoitustehtävien avulla opiskelijat saavat rohkeutta ja erilaisia työkaluja kokeilemiseen. Toinen ajattelun taito eli *kuvailu* on hyödyllinen taito esimerkiksi ryhmässä työskentelyssä [2]. Kuvailu voi olla esimerkiksi sanallista ratkaisun vaiheiden selittämistä tai oman vastauksen perustelua mutta myös kirjallista kuten ajatusten, todistusten ja tulosten kirjaamista [2]. Erilaisten pohdintatehtävien avulla pyritään edistämään sitä, että opiskelijat voivat vapaasti esimerkiksi kysyä toisiltaan kysymyksiä ja perustella toisilleen omia ajatuksiaan. *Visualisointi* on myös tärkeä ajattelun taito, eikä se rajoitu vain silmällä nähtävien asioiden visualisoimiseen [2]. Tämän taidon avulla voidaan hahmottaa myös mikroskooppisen pieniä asioita, esimerkiksi kuvaa apuna käyttäen tai ilman mitään apuvälineitä [2].

Kokeilemista esiintyy tämän kirjan tehtävistä erityisesti pohdinnoissa A.7 ja B.1 sekä harjoituksissa 2 ja 8. Näiden lisäksi pyritään erilaisten pohdinta- ja harjoitustehtävien avulla antamaan opiskelijoille valmiuksia kokeilemiseen jatkossakin matematiikan parissa. Kuvailua esiintyy ennenkaikkea todistus- ja perustelutehtävissä. Näitä ovat pohdinnat A.7, A.9, B.1, B.5, C.3 ja C.6 sekä harjoitukset 3, 4, 8, 11 ja 12. Visualisointia on mukana pohdinnoissa A.5, B.1 ja C.7 sekä harjoituksissa 1, 7 ja 10. Visualisointia voi kuitenkin käyttää apuna monissa muissakin tehtävissä.

2.3 Tehtävätyypit

Toinen kirjan sisältöön merkittävästi vaikuttava artikkeli on Swanin *Collaborative learning in mathematics* [15]. Tässä artikkelissa esitellään viisi erilaista matematiikan tehtävätyyppiä, jotka ovat luokittelu, eri esitysmuotojen yhdistäminen tai vertailu, matemaattisten väitteiden analysointi, matemaattisten ongelmien luominen, sekä päättelyn ja ratkaisujen arviointi. Näistä tehtävätyypeistä kirjassa toistuvat eri esitysmuotojen yhdistäminen tai vertailu, matemaattisten väitteiden analysointi sekä päättelyn ja ratkaisujen arviointi.

Esitysmuotojen yhdistäminen tai vertailu antaa opiskelijoille mahdollisuuden yhdessä pohtia ja vertailla erilaisia esitysmuotoja [15]. Tällaisten tehtävien vahvuus on, että opiskelijoiden ei tarvitse keskittyä esitysmuotojen luomiseen kuten usein matematiikan tehtävissä [15]. Näin opiskelijat voivat syventyä pohtimaan esitysmuotojen yhteyksiä ja eroja ja siten syventää osaamistaan [15]. Pohdinnassa A.5 yhdistellään erilaisia esitysmuotoja.

Matemaattisten väitteiden analysoinnissa opiskelijat pääsevät kehittämään omia perustelu- ja selitystaitojaan [15]. Ryhmissä he joutuvat vakuuttamaan toisilleen esimerkein tai todistuksin, miksi ovat oikeassa [15]. Opiskelijat voivat esimerkiksi pohtia yhdessä, onko jokin väite totta aina, joskus vai ei koskaan [15]. Pohdinnassa A.7 ja harjoituksessa 8 opiskelijat pääsevät analysoimaan haastavia väitteitä. Tällaiset tehtävät ovat oivallisia väärinkäsitysten korjaamiseen [15].

Päättelyn ja ratkaisujen arviointi sisältää kolme erilaista alatehtävätyyppiä [15]. Nämä ovat erilaisten ratkaisutapojen vertailu, päättelyn virheiden korjaaminen ja päättelyn vaiheiden järjestäminen [15]. Kaikkien kolmen alatehtävätyypin mukaisia tehtäviä esiintyy jossakin vaiheessa yhdistettyyn funktioon, yhdistetyn funktion derivaattaan tai juurifunktion derivaattaan liittyen. Näissä kaikissa alatehtävätyypeissä on yhteistä se, ettei opiskelijoiden tarvitse tehtävissä itse aikaan saada ratkaisua, vaan riittää, että he arvioivat jo annettuja ratkaisuja [15]. *Erilaisten ratkaisutapojen vertailussa* opiskelijat saavat kuvan siitä, miten monella tapaa tehtävän voi ratkaista ja ettei ole olemassa vain yhtä oikeaa tapaa [15]. Tämä voi auttaa opiskelijoita ratkaisemaan sellaisia tehtäviä, joiden ratkaisutavasta heillä ei ole käsitystä tehtävänannon luettuaan [15]. Esimerkiksi pohdinnassa C.6 vertaillaan erilaisia ratkaisutapoja. Lisäksi pohdinnassa B.5 opiskelijat pääsevät vertailemaan erilaisia ratkaisuja mutta myös korvaamaan virheitä. *Päättelyn virheiden korjaaminen* on toimiva tehtävätyyppi esimerkiksi yleisten virhekäsitysten korjaamiseen [15]. *Päättelyn vaiheiden järjestämisessä* voidaan kehittää opiskelijoiden ymmärrystä päättelyketjun logiikasta sekä ratkaisun rakenteesta [15]. Päättelyn vaiheita järjestetään pohdinnoissa A.9 ja C.3.

3 Oppimateriaalin perustelu

Oppimateriaali on jaettu kolmeen osaan, ja myös oppimateriaalin perustelu on jaettu vastaavasti kolmeen osaan. Perustelun ensimmäisessä osassa syvennytään yhdistetyn funktion oppimateriaalin valintoihin. Toisessa osassa perustellaan yhdistetyn funktion derivaatan oppimateriaali, kun taas kolmannessa osassa avataan juurifunktion derivaatan oppimateriaalin valintoja. Jokaisen perusteluosan alussa avataan yleisesti aihealuetta oppimisen kannalta. Osien alkujen perustelujen jälkeen syvennytään tarkemmin jokaisen pohdintatehtävän sisältöön ja siihen, miksi juuri kyseiset pohdintatehtävät ovat mukana tässä kirjassa.

3.1 Yhdistetty funktio

Yhdistetyn funktion käsitteen ymmärtämisen on monissa tutkimuksissa todettu tuottavan ongelmia useimmille opiskelijoille [3]. Yhdistetty funktio on myös keskeisimpiä funktion käsitteen ymmärtämistä vaikeuttavia osa-alueita [3]. Funktioiden väliset operaatiot ovat ylipäätäänkin vaikeita opiskelijoille, ja tämä korostuu erityisesti yhdistetyn funktion tapauksessa [14]. Lukion opetussuunnitelman derivaattamoduulin yksi kuudesta keskeisestä sisällöstä on yhdistetty funktio ja sen derivointi [11]. Yhdistettyä funktiota käsittelevän oppitunnin jälkeen opiskelijan tulisikin hallita yhdistetty funktio ja sen ominaisuudet sekä derivaattamoduulin onnistuneen suorittamisen että funktion käsitteen laajemman ymmärtämisen kannalta. Seuraavilla pohdintatehtävillä on pyritty vastaamaan yhdistetyn funktion haastavuuteen monipuolisesti eri näkökulmista.

Pohdinnassa A.5 vertaillaan yhdistetyn funktion erilaisia esitysmuotoja. Tällainen tulkitsemiseen keskittyvä yhdistelytehtävä antaa opiskelijalle mahdollisuuden löytää uusia merkityksiä ja yhteyksiä eri käsitteiden välillä [15]. Kyseisen pohdinnan kohdalla onkin tarkoitus kehittää sisä- ja ulkofunktion välisen yhteyden ymmärrystä sekä yhdistetyn funktion käsitteen ymmärrystä. Opiskelijoiden tulisi käyttää monia visuaalisia esitystapoja funktion esittämiseen [2]. Opiskelijoilla on kuitenkin usein hankaluuksia funktion esitysmuotojen muutoksissa graafisen esityksen, algebrallisen esityksen ja taulukkoesityksen välillä [14]. Ennen kaikkea funktion esittäminen järjestettynä parina koetaan usein hyvin haastavaksi [10]. Tällä tehtävällä pyritäänkin korjaamaan näiden ongelmakohtien aiheuttamia vaikeuksia.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa linjataan, että matematiikan opetuksessa tulee hyödyntää monipuolisia työtapoja, jotka kehittävät opiskelijoiden vuorovaikutusosaamista [11]. Lukion opetussuunnitelman mukaan työtapoihin tulisi kuulua työskentely niin yhdessä kuin yksinkin [11]. Yhteistyöoppiminen on tehokas tapa oppia matematiikkaa, ja sen avulla voidaan parantaa sekä oppimistuloksia että asennetta matematiikan oppimiseen [16]. Seuraava pohdinta A.6 toteutetaan pareittain ja se haastaa molempia osapuolia tasavertaisesti. Tehtävässä ensimmäinen osapuoli laatii ongelman, jonka toinen toinen osapuoli selvittää. Tällainen tehtävä, jossa ensin luodaan ja sitten selvitetään jokin ongelma, on yleensä vaikeampi tehtävän ratkaisijalle kuin tehtävän luojalle [15]. Tämän vuoksi tehtävän aikana vaihdetaan useaan otteeseen rooleja. Tämän tehtävän tavoitteena on, että opiskelijat saavat käsityksen siitä, kuinka monella erilaisella tavalla sisä- ja ulkofunktio voidaan valita.

Seuraavassa pohdinnassa A.7 arvioidaan väitteiden paikkansapitävyyttä. Tällainen arviointitehtävä kehittää opiskelijoiden taitoa perustella oma näkemyksensä ja auttaa tyypillisten väärinkäsitysten karsimisessa [15]. Esimerkiksi pohdinnan a-kohdassa saadaan välittömästi vahvistus sille, ettei yhdistetyn funktion sisä- ja ulkofunktiota voida yleisessä tapauksessa mielivaltaisesti kääntää toisin päin. Opiskelijoiden tulisi pystyä perustelemaan näkemyksensä muille opiskelijoille vakuuttavasti [2][11], ja heidän tulisi kyetä arvioimaan matemaattisia väittämiä [11]. Totta vai tarua -arviointitehtävissä opiskelijat pääsevät harjoittelemaan matemaattisen kielen täsmällistä käyttöä perusteluissaan ja voivat tutkia tarkemmin matemaattisia käsitteitä [13].

Opiskelijoille on usein haasteellista tuottaa pitkiä todistusketjuja [15]. Todistusketjujen rakentamista voidaan kuitenkin helpottaa antamalla opiskelijoille valmiita todistuksen osia [15]. Viimeisessä yhdistettyä funktiota käsittelevässä pohdinnassa A.9 muodostetaan todistuksia annetuista todistusvaiheista. Tällaisessa tehtävässä voidaan teknisten yksityiskohtien sijasta keskittyä todistuksen rakenteeseen ja todistuksen logiikan ymmärtämiseen [15]. Samalla tehtävässä kerrataan, mitä aidosti monotoninen funktio tarkoittaa. Derivaatta-moduulissa monotonisuutta käsitellään yleensä pääasiassa derivaattafunktiota tutkimalla, mutta tässä tehtävässä tutkitaan monotonisuutta täysin ilman derivaattafunktiota. Näin saadaan opiskelijoille laajempi ymmärrys monotonisuuden käsitteestä.

3.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

Ennestään opitun asian hyödyntäminen uuden asian opettamisessa tekee oppimisesta yleensä tehokkaampaa [15]. Tutkimuksissa, joissa tutkittiin ensimmäisen vuoden insinööriopiskelijoita, havaittiin kuitenkin, että opiskelijat pystyivät käyttämään onnistuneesti yhdistetyn funktion derivointisääntöä, riippumatta heidän ymmärryksestään yhdistetystä funktiosta [7] [8]. Mikäli opiskelijoilla on haasteita yhdistetyn funktion derivoinnin kanssa, saattavat ongelmat ja virhekäsitykset löytyäkin jostakin aivan muualta kuin yhdistetyn funktion puutteellisesta ymmärtämisestä. Yhdistetyn funktion derivointi on yksi vaikeimmista differentiaalilaskennan osa-alueista [4]. Yhdistetyn funktion derivaatan oppimista hankaloittavat lisäksi ketjusäännön vaikea esittäminen niin symbolisesti kuin sanallisestikin [4].

Yhdistetyn funktion derivointiin on olemassa useita tekniikoita. Opiskelijat saavatkin parhaan ymmärryksen yhdistetyn funktion derivointisäännöstä, kun heille opetetaan erilaisia tekniikoita [6] [9]. *Suoralla* (engl. straight) tekniikalla tarkoitetaan toimintatapaa, jossa käytetään yhdistetyn funktion derivointisääntöä useasti peräkkäin [6] [9]. Suorassa tekniikassa derivoidaan ensin uloin funktio, seuraavaksi jäljelle jääneen funktion uloin funktio ja tätä jatketaan siihen asti, että sisin funktio on derivoitu [6] [9]. Tätä tekniikka edustaa myös Open-closed Method, jota käytetään yhtenä yhdistetyn funktion derivointitekniikkana tässä kirjassa. Open-closed Method on algoritmi, jonka on todettu parantavan yhdistetyn funktion derivaatan osaamista [1]. *Käänteisessä* (engl. link) tekniikassa toimitaan päinvastaisesti suoraan tekniikkaan verrattuna, jolloin ensimmäisenä derivoidaan sisin funktio ja viimeisenä uloin funktio [6] [9]. Kolmas eli Leibniz-tekniikka perustuu Leibnizin merkintään [6] [9]. Leibnizin merkintää ei kuitenkaan käytetä tässä kirjassa, joten tämä tapa käsitellä yhdistetyn funktion derivaattaa sivuutetaan.

Yhdistetyn funktion derivaatan oppitunti alkaa pohdinnalla B.1, jossa opiskelijat pääsevät itse johtamaan ketjusäännön. Opiskelijoiden on usein vaikea käsittää, mistä yhdistetyn funktion derivointisääntö saadaan [4]. Se on yksi syy siihen, miksi yhdistetyn funktion derivointi on yksi vaikeimmista differentiaalilaskennan osa-alueista [4]. Tällä pohdintatehtävällä pyritään vaikuttamaan kyseiseen ongelmaan. Pohdintatehtävässä käytetään erilaisia tärkeitä matemaattisen ajattelun taitoja kuten visualisointia ja arvaamista. Pohdinnassa visualisoidaan muutosta vakioiden arvoja muuttamalla. Tällainen muutosten visuaalinen tutkiminen on yksi hyödyllisimmistä taidoista klassisessa matematiikassa [2]. Pohdinnassa myös arvataan, mikä on funktion $g(x) = \sin(x^2)$ derivaattafunktio. Arvauksen tarkistamisen myötä opiskelijat saavat usein uusia oivalluksia ja näkökulmia, joiden avulla he voivat arvata uudestaan [2].

Ketjusäännön määrittämisen jälkeen syvennytään ketjusäännön käyttämiseen. Pohdinnassa B.5 opiskelijoille annetaan arvioitavaksi kolme erilaista ratkaisua samaan tehtävänantoon. Erilaisten ratkaisustrategioiden vertailu ja arviointi antaa opiskelijoille mahdollisuuden nähdä, miten monella eri tavalla matemaattisia tehtäviä voidaan ratkaista [15]. Erilaisia ratkaisustrategioita tuodaan muutenkin monipuolisesti esille tämän oppitunnin aikana, kun huomautuksessa B.6 esitellään suora tekniikka Open-closed Method -algoritmin avulla, ja pohdinnassa B.8 tutustutaan käänteiseen tekniikkaan. Opiskelijat hyötyvät useiden eri ratkaisustrategioiden osaamisesta erityisesti silloin, kun he jäävät jumiin jossakin tehtävässä tai eivät tahdo päästä edes alkuun [15]. Kokonaisuudessaan erilaisten ratkaisutapojen hallinta tekee opiskelijoista parempia ongelman ratkaisijoita [15]. Pohdinnan ensimmäisessä kysymyksessä verrataan kahta ratkaisua, joissa molemmissa ulko- ja sisäfunktio on valittu täsmälleen samalla tavalla. Näistä ratkaisuista ensimmäisessä yhdistetyn funktion derivointisääntöä on käytetty vain kerran, kun toisessa ratkaisussa sitä on käytetty kahdesti. Tällä tehtävällä pyritään selventämään, että ketjusääntöä voidaan käyttää myös monta kertaa peräkkäin, vaikkei se tässä tehtävässä olekaan tarpeen. Toisessa kysymyksessä huomataan, että sisä- ja ulkofunktio voidaan valita myös toisin.

Huomautuksessa B.6 esitellään Open-closed Method -algoritmi, joka on tehokas tapa oppia yhdistetyn funktion derivointia [1]. Toinen tässä kirjassa esiintyvä yhdistetyn funktion derivoinnin keskeinen tekniikka eli käänteinen tekniikka, johdetaan pohdinnassa B.8. Käänteistä tekniikkaa suositellaan erityisesti heille, joilla on haasteita etumerkkien ja sulkeiden käytössä [9]. Tässä pohdinnassa opiskelijat keksivät algoritmin käänteiselle yhdistetyn funktion derivoinnin tekniikalle. Keksiminen on matemaatikoille ratkaisevan tärkeä taito, jota myös opiskelijoiden tulisi harjoitella [2].

3.3 Juurifunktion derivaatta

Yhdistetyn funktion käsittelemisen jälkeen siirrytään juurifunktion derivointiin. Juurifunktion derivoinnista ei ole saatavilla kovin paljon erityisesti juurifunktiota koskevaa tutkimustietoa, vaan tutkimustieto käsittelee yleisemmin derivointia. Tämän vuoksi juurifunktion derivaatan osassa pyritäänkin hyödyntämään pääsääntöisesti kahta tämän tutkielman tärkeintä artikkelilähdettä. Juurifunktion derivaatta -osion alussa palautetaan nopeasti mieleen, mikä on juurifunktio. Osiossa pyritään antamaan opiskelijoille selkeä käsitys siitä, miksi erilaisilla juurifunktiolla on eri määrittelyjoukot, ja mitä ne ovat. Lisäksi pyritään siihen, että opiskelijat saavat kattavan käsityksen siitä, miksi juurifunktioiden derivointisäännöt toimivat.

Ensimmäinen pohdinta C.3 koostuu kahdesta osasta. Pohdinnan ensimmäisessä osassa osoitetaan, että neliöjuurifunktion derivointisääntö pätee. Osoittaminen tapahtuu numeroimalla annetut todistuksen vaiheet oikeaan järjestykseen. Myös yhdistetyn funktion kohdalla pohdinnassa A.9 annetuista vaihtoehdoista valitaan sopivia kohtia todistuksen eri vaiheisiin. Molempien pohdintojen tarkoitus on päättelyn vaiheiden järjestäminen. mutta pohdinnassa C.3 ei ole mukana lainkaan vääriä vaihtoehtoja. Tällaiset järjestelytehtävät antavat mahdollistavat loogisen päättelyn harjoittelemisen [15]. Pohdinnan C.3 toisessa osassa osoitetaan yleisen juurifunktion derivointisääntö todeksi. Todistuksessa käytetään apuna pohdinnan ensimmäisen osan nelijuurifunktion derivointisäännön todistuksen vaiheita.

Pohdinnassa C.6 opiskelijat pääsevät vertailemaan kahta erilaista ratkaisutapaa. Tällä pohdinnalla halutaan korostaa sitä, että aina ei tarvitse käyttää vain jotakin yhtä tiettyä derivointisääntöä, jos on olemassa muitakin mahdollisuuksia. Tällä oppitunnilla pyritäänkin siihen, että osataan tilanteen mukaan hyödyntää erilaisia derivointisääntöjä. Tähän pyrkivät oppitunnit ovat melko harvinaisia, vaikka ne vahvistavat opiskelijoiden ongelmanratkaisutaitoja ja kehittävät heidän itseluottamustaa [15].

Derivaattaa käsittelevän kurssin tulee pohjautua vahvasti kuvaajien tutkimiseen [12]. Seuraavassa pohdinnassa C.7 tutkitaan juurifunktioiden ja niiden derivaattafunktioiden kuvaajia Geo-Gebran avulla. Pohdinnassa selvitetään juurifunktion astetta muuttamalla, miten juurifunktion ja sen derivaattafunktion määrittelyjoukot ja arvojoukot muuttuvat. Tällainen tehtävä, jossa vakioiden arvoja muuttamalla nähdään miten funktio ja sen derivaattafunktio muuttuvat, voi erityisesti polynomien kohdalla auttaa opiskelijoita ymmärtämään myös heidän tekemiään laskutoimituksia paremmin [5]. Tehtävätyyppi sopii erinomaisesti myös korostamaan sitä, miten juuren aste vaikuttaa juurifunktioon ja sen derivaattafunktioon. Tällainen muutoksen visualisointi on yksi osa visualisoimisen taitoa [2], jota tässä kirjassa pyritään kehittämään.

Viitteet

[1] Asyura Abd Nassir, Nor Habibah Tarmuji, Salimah Ahmad, Nur Hidayah Masni Abdullah, and Aminatul Solehah Idris. Experience-discovery approach: The effect of open-closed method (ocm) in teaching chain rule differentiation of composite function. *Menemui Matematik (Discovering Mathematics)*, 40(2):82–88, 2018.

[2] Al Cuoco, E Paul Goldenberg, and June Mark. Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4):375–402, 1996.

[3] Ed Dubinsky and Robin T Wilson. High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1):83–101, 2013.

[4] Sheldon P Gordon. Discovering the chain rule graphically. *Mathematics and Computer Education*, 39(3):195–197, 2005.

[5] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter, Y Kreis, and Z Lavicza. Teaching and calculus with free dynamic mathematics software geogebra, 2008.

[6] Zingiswa Mybert Monica Jojo. *An APOS exploration of conceptual understanding of the chain rule in calculus by first year engineering students.* PhD thesis, 2011.

[7] Zingiswa Mybert Monica Jojo. Mental constructions formed in the conceptual understanding of the chain rule. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(1):171–171, 2014.

[8] Zingiswa Mybert Monica Jojo, Aneshkumar Maharaj, and Deonarain Brijlall. From human activity to conceptual understanding of a mathematical concept. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1):77–99, 2013.

[9] Zingiswa Mybert Monica Jojo, Aneshkumar Maharaj, and Deonarain Brijlall. Schema development for the chain rule: A south african case study. *South African Journal of Higher Education*, 27(3):645661, 2013.

[10] Melanie Jones. Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 7(2):5, 2006.

[11] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, 2019.

[12] Nevin Orhun. Graphical understanding in mathematics education: Derivative functions and students' difficulties. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55:679–684, 2012.

[13] Mary E Pilgrim. Addressing the standards for mathematical practice in a calculus class. *The Mathematics Teacher*, 108(1):52–57, 2014.

[14] Baruch Schwarz, Tommy Dreyfus, and Maxim Bruckheimer. A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers & Education*, 14(3):249–262, 1990.

[15] Malcolm Swan. Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs*, pages 162–176, 2006.

[16] Effandi Zakaria, Lu Chung Chin, and Md Yusoff Daud. The effects of cooperative learning on students' mathematics achievement and attitude towards mathematics. *Journal of social sciences*, 6(2):272–275, 2010.

A Yhdistetty funktio

Aiemmin tässä moduulissa derivoitiin funktio $h(x) = \sin kx$, joka on funktioiden $f(x) = kx$ ja $g(x) = \sin x$ muodostama yhdistetty funktio. Ennen kuin lähdetään tutkimaan yleisesti yhdistetyn funktion derivointia, määritellään yhdistetty funktio ja tutkitaan sen ominaisuuksia.

Määritelmä A.1 Funktioiden u ja s yhdistetty funktio on $(u \circ s)(x) = u(s(x))$, missä funktiota u kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota s *sisäfunktioksi*. Yhdistetyn funktion määrittelyjoukko muodostuu sellaisista x:n arvoista funktion s määrittelyjoukossa, että $s(x)$ on funktion u määrittelyjoukossa.

Lisätieto A.2 Merkintä $\circ$ luetaan "*pallo*". Esimerkiksi $(u \circ s)(x) = u(s(x))$ voidaan lukea "funktion u pallo s arvo kohdassa x on funktion u arvo kohdassa $s(x)$".

Huomautus A.3 Yhdistetyn funktion $g \circ f$ arvoa laskettaessa laskujärjestys on oikealta vasemmalle. Ensin suoritetaan funktio f ja sitten funktio g.

Mallitehtävä A.4 Olkoon $f(x) = 5 - x$ ja $g(x) = x^3$. Laske funktion $(g \circ f)(x)$ arvo, kun $x = 7$.

Tapa 1 Funktion $(g \circ f)(x)$ arvo saadaan laskemalla ensin funktion $f(x)$ arvo ja sijoittamalla saatu arvo funktioon $g(x)$. Lasketaan siis ensin

$$f(7) = 5 - 7 = -2,$$

minkä jälkeen saatu vastaus -2 sijoitetaan funktioon $g(x)$, jolloin

$$g(-2) = (-2)^3 = -8.$$

Tapa 2 Muodostetaan ensin yhdistetty funktio $(g \circ f)(x)$, minkä jälkeen lasketaan yhdistetyn funktion arvo, kun $x = 7$. Nyt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (5 - x)^3,$$

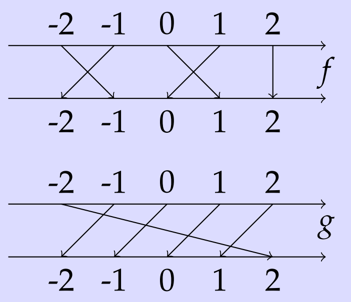
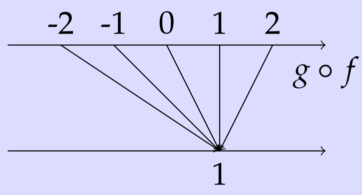
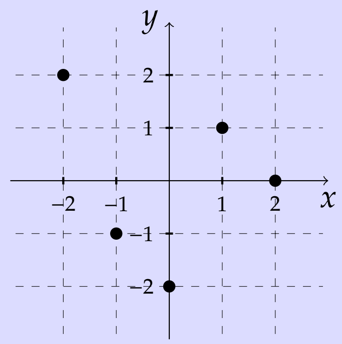
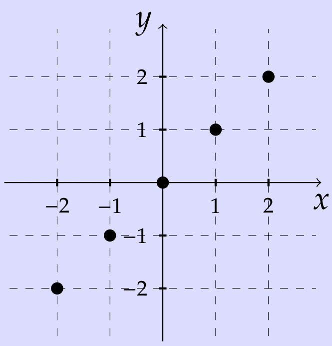
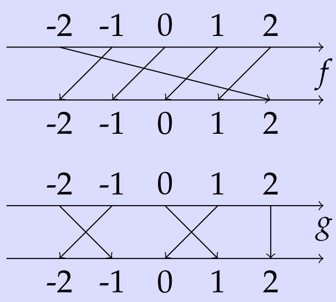
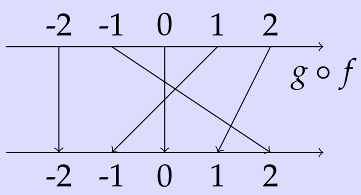
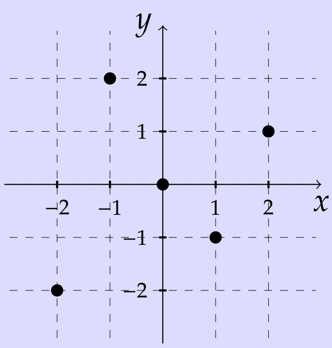
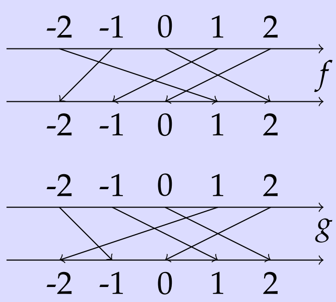
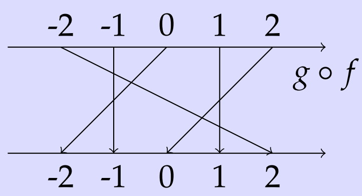
jolloin

$$(g \circ f)(7) = (5 - 7)^3 = -8.$$

Vastaus:

$$(g \circ f)(7) = -8$$

Pohdinta A.5 Yhdistä saman yhdistetyn funktion eri esitysmuodot ja täydennä tekemällä itse puuttuvat esitysmuodot.

		
		
		$\boldsymbol{(x, y) = (x, (g \circ f)(x))}$ $(-2, 2)$ $(-1, -1)$ $(0, -2)$ $(1, 1)$ $(2, 0)$
$\boldsymbol{(x, y) = (x, (g \circ f)(x))}$ $(-2, -2)$ $(-1, -1)$ $(0, 0)$ $(1, 1)$ $(2, 2)$		$\boldsymbol{(x, y) = (x, (g \circ f)(x))}$ $(-2, 1)$ $(-1, 1)$ $(0, 1)$ $(1, 1)$ $(2, 1)$

Yhdistettyäsi eri esitysmuodot ja täydennettyäsi puuttuvat esitysmuodot, esitä jokainen funktio taulukkona.

Aikaisemmin on harjoiteltu, missä järjestyksessä sisä- ja ulkofunktio lasketaan. Lisäksi on tutustuttu useisiin yhdistetyn funktion esitysmuotoihin. Seuraavaksi syvennytään siihen, millaisilla tavoilla sisä- ja ulkfunktio voidaan valita.

Pohdinta A.6 (Paritehtävä) Valitkaa, kumpi on opiskelija A ja kumpi on opiskelija B.

Olkoon funktio

$$h(x) = \frac{1}{(1+3x^2)^2}$$

sellainen, että $h(x) = (g \circ f)(x)$. Valitkaa funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ siten, että sisäfunktio $f(x)$ on eri jokaisessa tehtävän kohdassa, ja ulkofunktio $g(x)$ on eri jokaisessa tehtävän kohdassa.

(a) Opiskelija A valitsee sopivan ulkofunktion $g(x)$ ja antaa opiskelijan B tehtäväksi ratkaista sisäfunktio $f(x)$.

(b) Vaihtakaa osia siten, että opiskelija B valitsee funktion $g(x)$ ja toistakaa edellinen kohta.

(c) Opiskelija B valitsee sopivan sisäfunktion $f(x)$ ja antaa opiskelijan A tehtäväksi ratkaista ulkofunktio $g(x)$.

(d) Vaihtakaa osia siten, että opiskelija A valitsee funktion $f(x)$ ja toistakaa edellinen kohta.

Seuraavissa pohdinnoissa tutustutaan yhdistetyn funktion ominaisuuksiin.

Pohdinta A.7 Pohdi, onko väite totta *aina*, *joskus* vai *ei koskaan*. Jos päädyt vastaukseen *joskus*, keksi esimerkki, jolloin väite pätee. Jos päädyt vastaukseen *aina* tai *ei koskaan*, yritä perustella vastaus.

(a) $g \circ f = f \circ g$

(b) $g \circ f = f = f \circ g$

(c) $(g \circ f)(x) = x$

(d) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Kerrataan ennen seuraavaa pohdintaa käsitteet aidosti kasvava ja aidosti vähenevä.

Lisätieto A.8
Funktio f on *aidosti kasvava*, jos kaikilla x_1 ja x_2, joilla $x_1 < x_2$, pätee $f(x_1) < f(x_2)$.
Funktio f on *aidosti vähenevä*, jos kaikilla x_1 ja x_2, joilla $x_1 < x_2$, pätee $f(x_1) > f(x_2)$.

Pohdinta A.9 Muodosta todistuspolut seuraaville väitteille alla olevien todistusvaiheiden avulla. Valitse jokaiselta riviltä sopiva vaihtoehto kyseiseen todistukseen. Aloita ylimmältä riviltä ja siirry rivi kerrallaan alaspäin, kunnes todistus on valmis.

(a) Jos f ja g ovat aidosti kasvavia funktioita, niin $g \circ f$ on myös aidosti kasvava.

(b) Jos f ja g ovat aidosti väheneviä funktioita, niin $g \circ f$ on aidosti kasvava.

Koska f on aidosti kasvava,	Koska f on aidosti vähenevä,
niin $f(x_1) > f(x_2)$ kaikilla $x_1 < x_2$.	niin $f(x_1) < f(x_2)$ kaikilla $x_1 < x_2$.
Tällöin, koska g on aidosti kasvava,	Tällöin, koska g on aidosti vähenevä,
niin $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ kaikilla $x_1 < x_2$	niin $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ kaikilla $x_1 < x_2$
eli $g \circ f$ on aidosti kasvava.	eli $g \circ f$ on aidosti vähenevä.

Harjoitukset

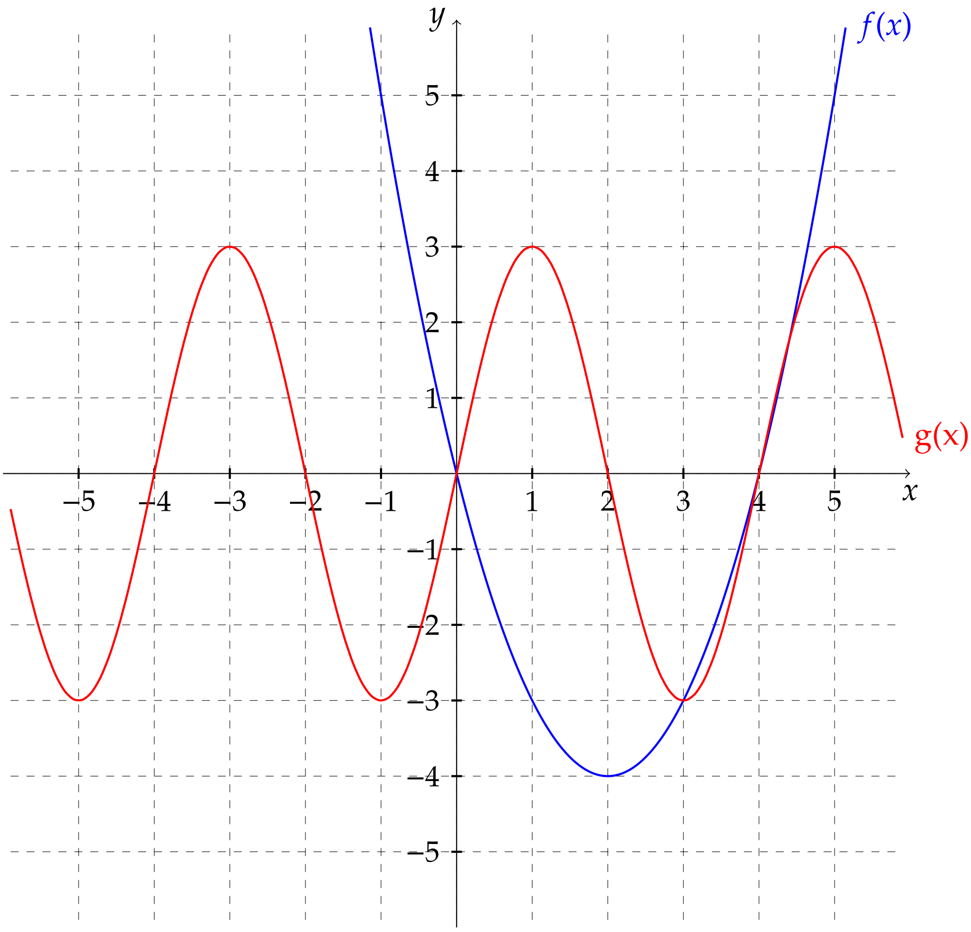
1. Koordinaatistossa on funktioiden f ja g kuvaajat. Määritä kuvaajien avulla

(a) $(g \circ f)(1)$

(b) $(f \circ g)(5)$

(c) $(g \circ g)(-3)$

(d) $(f \circ f)(-1)$.



2. Olkoon $f(x) = \frac{1}{x}$ ja $g(x) = x + 2$.

(a) Muodosta funktiot $h(x) = (f \circ g)(x)$ ja $i(x) = (g \circ f)(x)$.

(b) Määritä funktioiden $h(x)$ ja $i(x)$ määrittelyjoukot.

(c) Onko olemassa sellaista x:n arvoa, että $h(x) = i(x)$?

3. Olkoon funktio f aidosti kasvava ja funktio g aidosti vähenevä.

(a) Onko funktio $g \circ f$ aidosti kasvava tai aidosti vähenevä? Perustele.

(b) Muuttuuko tilanne, jos f on aidosti vähenevä ja g on aidosti kasvava?

Vihje: Voit käyttää apuna kohtaa A.9.

4. Pohdinnassa A.7 huomattiin, että $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pätee aina. Osoita tämä todeksi.

B Yhdistetyn funktion derivaatta

Aiemmin on tutkittu funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaattafunktion käyttäytymistä GeoGebran avulla ja on huomattu, että sen derivaattafunktio on $f'(x) = a\cos(ax)$. Kerrataan seuraavaksi hieman aiempia havaintoja ja tutkitaan lisää funktioiden derivaattoja.

Pohdinta B.1 Avaa GeoGebra-appletti ja vastaa kysymyksiin sen avulla.

Olkoon $f(x) = \sin(ax)$, jolloin $f'(x) = a\cos(ax)$.

1. Mikä on funktion $f(x)$ jakson pituus. kun $a > 0$?
2. Mikä on funktion $f'(x)$ jakson pituus, kun $a > 0$?
3. Mitkä ovat funktion $f'(x)$ suurin ja pienin arvo?
4. Mikä suora $h(x) = bx + c$ koskettaa jokaista funktion $f'(x)$ paikallista huippua?

Tutkitaan seuraavaksi funktiota $g(x) = \sin(x^2)$ välillä $[0, \infty[$.

5. Mitä huomaat nyt funktioiden $g(x)$ ja $g'(x)$ jaksojen pituuksista?
6. Mitkä ovat funktion $g'(x)$ suurin ja pienin arvo?
7. Mikä suora $h(x) = bx + c$ koskettaa jokaista funktion $g'(x)$ paikallista huippua välillä $[0, \infty[$?

Funktion $f(x) = \sin(ax)$ derivaattafunktio on $f'(x) = a\cos(ax)$. Huomioi, että kosinin edessä oleva kerroin on a ja suora, joka koskettaa $f'(x)$:n jokaista paikallista huippua, on $h(x) = a$.

8. Yritä näillä tiedoin arvata, mikä on funktion $g(x) = \sin(x^2)$ derivaattafunktio $g'(x)$. Voit tarkastaa esimerkiksi GeoGebran avulla, osuiko arvauksesi oikeaan. (Syötä arvauksesi GeoGebraan ja vertaa sen kuvaajaa GeoGebra-appletissa olevaan kuvajaan.)
9. Arvattuasi oikean derivaattafunktion $g'(x)$ mieti, miten sen voisi ilmaista funktion $g(x)$ ulkofunktion $u(x) = \sin x$, sisäfunktion $s(x) = x^2$ sekä ulko- ja sisäfunktion derivaattojen $u'(x)$ ja $s'(x)$ avulla.

Mikäli sait vastattua pohdinnan B.1 viimeiseen kohtaan, niin olet onnistunut määrittämään yhdistetyn funktion derivointisäännön. Seuraavaksi muotoillaan tämä sääntö matemaattiseen muotoon.

Lause B.2 (Yhdistetyn funktion derivointisääntö) Olkoon funktio f derivoituva pisteessä x ja olkoon funktio g derivoituva pisteessä $f(x)$. Tällöin

$$(g \circ f)'(x) = \mathrm{D}\, g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Lisätieto B.3 Yhdistetyn funktion derivointisääntöä kutsutaan myös nimellä *ketjusääntö* (engl. *chain rule*).

Mallitehtävä B.4 (Pitkä matematiikka, ylioppilaskoe, syksy 2019, t. 2.3)
Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = (2x-1)^7$.

Ratkaisu: Jotta voidaan käyttää lausetta B.2, tulee määrittää funktion $f(x)$ sisä- ja ulkofunktio. Valitaan ulkofunktioksi $u(x) = x^7$ ja sisäfunktioksi $s(x) = 2x-1$. Tällöin $s'(x) = 2$, $u'(x) = 7x^6$ ja $u'(s(x)) = 7(2x-1)^6$. Nyt lauseen B.2 mukaisesti

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,(2x-1)^7 &= 7(2x-1)^6 \cdot 2 \\ &= 14(2x-1)^6. \end{aligned}$$

Ylläolevassa mallitehtävässä on suhteellisen yksinkertaista määrittää ulko- ja sisäfunktiot. Näiden funktioiden määrittäminen ei kuitenkaan ole enää niin yksinkertaista funktioiden ollessa monimutkaisempia.

Pohdinta B.5 Oppilaat ovat saaneet kurssikokeessa tehtäväkseen derivoida funktio $f(x) = \sin(3x^2+5)$.

1. Ari ja Rauha valitsivat ulko- ja sisäfunktiot samalla tavalla ja saivat saman vastauksen. Rauhan vastaus on kuitenkin huomattavasti Arin vastausta pidempi. Mitä Arin käyttämää derivointisääntöä Rauha ei käyttänyt?

2. Arin ja Oton ulko- ja sisäfunktioiden valinnat eroavat toisistaan. Miksi he eivät saa samaa vastausta? Missä kohdassa virhe on tapahtunut?

Ari: Olkoon ulkofunktio $u(x) = \sin x$ ja sisäfunktio $s(x) = 3x^2+5$. Näin ollen ketjusäännön avulla saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,\sin(3x^2+5) &= \cos(3x^2+5) \cdot \mathrm{D}\,(3x^2+5) \\ &= \cos(3x^2+5) \cdot 6x \\ &= 6x\cos(3x^2+5). \end{aligned}$$

Otto: Valitaan ulkofunktioksi $u(x) = \sin(3x + 5)$ ja sisäfunktioksi $s(x) = x^2$. Nyt

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\sin(3x^2+5) &= \cos(3x^2+5)\cdot \mathrm{D}\,x^2 \\ &= \cos(3x^2+5)\cdot 2x \\ &= 2x\cos(3x^2+5). \end{aligned}$$

Rauha: Valitaan ensin ulkofunktioksi $u(x) = \sin x$ ja sisäfunktio $s(x) = 3x^2+5$. Koska $u'(x) = \cos x$, niin

$$\mathrm{D}\sin(3x^2+5) = \cos(3x^2+5)\cdot \mathrm{D}\,(3x^2+5).$$

Valitaan nyt jäljelle jääneen derivoitavan funktion $3x^2+5$ ulkofunktioksi $3x+5$ ja sisäfunktioksi x^2. Koska $\mathrm{D}\,(3x+5) = 3$, saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\sin(3x^2+5) &= \cos(3x^2+5)\cdot \mathrm{D}\,(3x^2+5) \\ &= \cos(3x^2+5)\cdot 3\cdot \mathrm{D}\,x^2 \\ &= \cos(3x^2+5)\cdot 3\cdot 2x \\ &= 6x\cos(3x^2+5). \end{aligned}$$

Seuraava algoritmi helpottaa erityisesti sellaisten yhdistettyjen funktioiden $f\circ g\circ h\circ\cdots$ derivointia, joissa funktioiden $f, g, h, \ldots$ määrä on enemmän kuin kaksi.

Huomautus B.6 Yhdistetty funktio voidaan derivoida alla olevan algoritmin avulla.

1. Derivoi ulkofunktio.
2. Sulje derivoitu ulkofunktio ja derivoi jäljelle jäävä funktio.
3. Toista edellistä kohtaa, kunnes koko funktio on derivoitu.
4. Kerro kaikki funktioiden derivaatat keskenään ja sievennä vastaus.

Algoritmissa derivoidaan siis ensin yhdistetyn funktion uloin funktio ja viimeisenä yhdistetyn funktion sisin funktio. Tutkitaan seuraavaksi algoritmin käyttöä mallitehtävän avulla.

Mallitehtävä B.7 Derivoi funktio $f(x) = (\sin((3x^2+5)^2))^3$.

$$\begin{aligned} & \mathrm{D}\,(\sin((3x^2+5)^2))^3 \\ = \;& 3(\sin((3x^2+5)^2))^2 \cdot \mathrm{D}\,(\sin((3x^2+5)^2)) \\ = \;& 3(\sin((3x^2+5)^2))^2 \cdot \cos((3x^2+5)^2) \cdot \mathrm{D}\,((3x^2+5)^2) \\ = \;& 3(\sin((3x^2+5)^2))^2 \cdot \cos((3x^2+5)^2) \cdot 2(3x^2+5) \cdot \mathrm{D}\,(3x^2+5) \\ = \;& 3(\sin((3x^2+5)^2))^2 \cdot \cos((3x^2+5)^2) \cdot 2(3x^2+5) \cdot 6x \\ = \;& 36x(3x^2+5)(\sin((3x^2+5)^2))^2 \cos((3x^2+5)^2) \end{aligned}$$

1. Derivoi ulkofunktio x^3.
2. Sulje derivoitu ulkofunktio ja derivoi jäljelle jäävä funktio.
2. Sulje derivoitu ulkofunktio ja derivoi jäljelle jäävä funktio.
2. Sulje derivoitu ulkofunktio ja derivoi jäljelle jäävä funktio.
4. Kerro kaikki funktioiden derivaatat keskenään ja sievennä.

Mallitehtävässä B.7 käytetään yhdistetyn funktion derivaatan sääntöä useasti peräkkäin. Tällöin muodostuu derivointien ketju, josta myös ketjusääntö on saanut nimensä.

Pohdinta B.8 Lauseessa B.6 edetään uloimman funktion derivoinnista kohti sisimmän funktion derivointia. Yhdistetyn funktion derivaatta voidaan kuitenkin laskea myös käänteisesti, jolloin lasketaan ensin sisimmän funktion derivaatta ja edetään derivoinneissa kohti ulointa funktiota.

(a) Muodosta käänteiselle laskutavalle lauseen B.6 kaltainen algoritmi, jolla derivaatta saadaan laskettua.

(b) Kun olet muodostanut algoritmin testaa sen toimivuus derivoimalla pohdinnan B.5 funktio $f(x) = \sin(3x^2+5)$. Voit myös yrittää derivoida luomasi algoritmin avulla mallitehtävän B.7 funktio $f(x) = (\sin((3x^2+5)^2))^3$.

Harjoitukset

5. Derivoi funktio $f(x) = \cos(\cos x^3)$ käyttämällä pohdinnassa B.8 muodostettua algoritmia. Tarkista vastaus algoritmin B.6 avulla.

6. Osoita, että funktio $f(x) = (x-5)^3 + 2x$ on aidosti kasvava.

7. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (\sin x + \cos x)^3$ välillä $[0, 2\pi]$.

(a) Määritä funktion $f(x)$ derivaattafunktion nollakohdat.

(b) Millä väleillä funktio $f(x)$ on kasvava.

(c) Määritä funktion $f(x)$ ääriarvot.

8. Onko väite totta aina, joskus vai ei koskaan? Perustele vastauksesi.

(a) Jos f ja g ovat jatkuvia ja derivoituvia funktioita kaikilla $x > 0$, niin $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ kaikilla $x > 0$.

(b) Jos $f'(x) > 0$ ja $g'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $(f \circ g)'(x) > 0$ ja $(g \circ f)'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(c) Jos $(f \circ g)'(x) = f'(x)$, niin $g(x) = x$.

C Juurifunktion derivaatta

Palautetaan tämän oppitunnin aluksi mieleen kaksi entuudestaan tuttua määritelmää.

Määritelmä C.1 (Yksikkömurtopotenssi) Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $a > 0$. Tällöin

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Määritelmä C.2 Funktiota $f(x) = \sqrt[n]{x}$, missä n on positiivinen kokonaisluku, kutsutaan *juurifunktioksi*.

Pohdinta C.3 Tutkitaan seuraavaksi juurifunktioiden derivaattafunktioita.

Osa 1 Alla on lueteltu vaiheet, joiden avulla voidaan osoittaa, että

$$\mathrm{D}\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ kun } x > 0.$$

Järjestä numeroimattomat vaiheet siten, että niistä muodostuu järkevä todistus.

1. Olkoon $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}$ ja $f(x) = x^2$.

- ☐ Koska $f'(x) = \mathrm{D}\,x^2 = 2x$, niin $g'(x) = \frac{1}{2(g(x))}$.
- ☐ Nyt $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$.
- ☐ Edellisestä kohdasta saadaan $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.
- ☐ Näin ollen $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- ☐ Koska $\mathrm{D}\,x = 1$, saadaan ketjusäännöllä, että $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 1$.

Osa 2 Muodosta todistus, jossa osoitat, että

$$\mathrm{D}\,\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}, \text{ kun } x > 0 \text{ ja } n \text{ on positiivinen kokonaisluku.}$$

Käytä apuna osan 1 todistusta.

Yllä olevan pohdinnan C.3 osan 1 derivointisääntö $\mathrm{D}\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ on vain erikoistapaus n:n arvolla 2 pohdinnan C.3 osan 2 derivointisäännöstä $\mathrm{D}\,\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.

Lisätieto C.4 Edellisen pohdinnan C.3 osassa 2 osoitettiin, että $\mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. Koska $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, niin aiemmasta yhtälöstä saadaan

$$\mathrm{D}\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}.$$

Sieventämällä saadaan

$$\mathrm{D}\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{n}\cdot(n-1)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

eli

$$\mathrm{D}\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jo tunnettu derivointisääntö

$$\mathrm{D}\,x^{m} = mx^{m-1},$$

missä m on positiivinen kokonaisluku, pätee myös silloin, kun

$$m = \frac{1}{n},$$

missä n on positiivinen kokonaisluku.

Muotoillaan vielä pohdinnan C.3 ja lisätiedon C.4 sisältö yhdeksi lauseeksi.

Lause C.5 (Juurifunktion derivaatta)

$$\mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \mathrm{D}\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

kun $x > 0$ ja n on positiivinen kokonaisluku.

Pohdinta C.6 Katri ja Lauri ovat derivoineet funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Heidän vastauksensa poikkeavat kuitenkin toisistaan. Onko toinen heistä tehnyt virheen vai ovatko molemmat oikeassa? Korjaa opiskelijan tekemä virhe, jos löydät sellaisen, tai perustele, miksi molemmat ovat oikeassa.

Katri: Lauseen C.5 avulla saadaan, että

$$\mathrm{D}\sqrt[4]{x} = \mathrm{D}\,x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}.$$

Lauri: Pohdinnan C.3 osan kaksi derivointisääntöä käyttämällä

$$\mathrm{D}\sqrt[4]{x} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^{4-1}} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^{3}}.$$

Lauseessa C.5 on ehtona, että $x > 0$ ja n on positiivinen kokonaisluku. Kun $n = 1$, niin $\mathrm{D}\sqrt[1]{x} = \frac{1}{1}x^{\frac{1}{1}-1} = x^0 = 1$. Tämän tiedetään jo ennestään todeksi, koska $\mathrm{D}\,x = 1$. Yllä olevan lauseen perusteella saatu derivaatta pätee kuitenkin vain silloin, kun $x > 0$, vaikka tiedetään, että $\mathrm{D}\,x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tutkitaan seuraavaksi, millä positiivisen kokonaisluvun n arvoilla, juurifunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ derivaattafunktion määrittelyjoukko voi olla laajempi kuin $x > 0$.

Pohdinta C.7 Kutsutaan juurifunktiota $f(x) = \sqrt[n]{x}$

- parilliseksi, jos $n = 2, 4, 6, \dots$
- parittomaksi, jos $n = 3, 5, 7, \dots$.

Täydennä alla oleva taulukko tutkimalla GeoGebra-appletin avulla parittomia ja parillisia juurifunktioita.

	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	
	$n = 2, 4, 6, \dots$	$n = 3, 5, 7, \dots$
funktion $f(x)$ suurin mahdollinen määrittelyjoukko		
funktion $f(x)$ arvojoukko		
funktion $f'(x)$ suurin mahdollinen määrittelyjoukko		
funktion $f'(x)$ arvojoukko		

Edellisessä pohdinnassa C.7 huomattiin, että parittoman juurifunktion derivaattafunktion suurin mahdollinen määrittelyjoukko on $x \neq 0$. Lauseen C.5 avulla saadaan tosin laskettua derivaatta vain silloin, kun $x > 0$. Parittomilla juurifunktiolla kuitenkin pätee, että derivaatta lasketaan samalla tavalla, kun $x > 0$ tai kun $x < 0$. Muotoillaan tämä ominaisuus lauseeksi.

Lause C.8

$$\mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \mathrm{D}\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

kun $x \neq 0$ ja $n = 3, 5, 7, \dots$.

Lause C.8 voidaan perustella pohdinnan C.3 kaltaisella perustelulla.

Harjoitukset

9. Määritä funktio $f'(x)$ ja sen suurin mahdollinen määrittelyjoukko, kun

(a) $f(x) = \sqrt{-x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{2 + x^2}$.

10. Olkoon $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$. Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo.

11. Osoita derivaatan avulla, että neliöjuurifunktio $f(x) = \sqrt{x}$, missä $x \geq 0$, on aidosti kasvava.

12. Olkoon p kokonaisluku, q positiivinen kokonaislukua ja $x \geq 0$. Olkoon lisäksi $f(x) = \sqrt[q]{x}$ ja $g(x) = x^p$.

(a) Muodosta funktio $(f \circ g)(x)$.

(b) Määritä derivaattafunktio $(f \circ g)'(x)$, kun $x > 0$.

(c) Tiedetään, että $\sqrt[q]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = x^{p \cdot \frac{1}{q}} = x^{\frac{p}{q}}$. Muotoile tämän tiedon sekä a ja b kohtien avulla derivointisääntö potenssifunktiolle $h(x) = x^r$, missä $r \in \mathbb{Q}$.

D Opettajan opas

Yhdistetyn funktion, yhdistetyn funktion derivaatan ja juurifunktion derivaatan osiot on suunniteltu siten, että jokaisen osion läpikäyminen vie yhden 75 minuutin oppitunnin. Tätä alustavaa tuntijakoa voi muokata tarpeen mukaan opiskelijoiden etenemistä tarkasti seuraten. Seuraavaksi syvennytään siihen, mihin eri pohdintatehtävillä pyritään. Lisäksi annetaan vinkkejä eriyttämiseen ja opettajan rooliin pohdinnoissa.

D.1 Yhdistetty funktio

Pohdinta A.5

Esitysmuotojen oppimisen lisäksi pohdinnassa on tavoitteena vahvistaa opiskelijan käsitystä sisä- ja ulkofunktiosta. Pohdinta voidaan toteuttaa esimerkiksi pienissä ryhmissä, jolloin ryhmien sisällä on mahdollisuus keskustelun heräämiseen. Esitysmuodot kannattaa tulostaa etukäteen erillisille papereille tai korteille, jolloin yhdistely onnistuu ryhmätyöskentelynä helposti. Myös puuttuvien esitysmuotojen tekeminen onnistuu helpoiten erillisille papereille tai korteille. Funktion esittämisen taulukkona voi tehdä myös tietokoneen avulla. Opettajan kannattaa huomauttaa oppilaille, etteivät nämä eri esitysmuodot rajoitu vain tähän tehtävään, vaan esitysmuotoja on useita erilaisia. Riippuu valitusta funktiosta, mitkä esitysmuodot ovat parhaita missäkin tilanteessa.

Vastaus: Funktioiden taulukkomuodot ovat:

x	$(g \circ f)(x)$
-2	2
-1	-1
0	-2
1	1
2	0

x	$(g \circ f)(x)$
-2	-2
-1	2
0	0
1	-1
2	1

x	$(g \circ f)(x)$
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

x	$(g \circ f)(x)$
-2	1
-1	1
0	1
1	1
2	1

Pohdinta A.6

Opettaja voi tässä pohdinnassa kannustaa opiskelijoita keksimään rohkeasti vielä lisää erilaisia sisä- ja ulkofunktioita, vaikka he olisivatkin jo suorittaneet pohdinnan kaikki kohdat. Yhdistettyä funktiota voidaan myös vaihtaa uuteen tarvittaessa. Mikäli ratkaisuvuorossa olevalla opiskelijalla on vaikeuksia saada sisä- tai ulkofunktio selville, voi tehtävän laatinut osapuoli ottaa opettajan roolia ja auttaa pariaan ratkaisun keksimisessä ja sen selittämisessä.

Pohdinta A.7

Yhdistetyn funktion ominaisuuksien oppimisen lisäksi tehtävässä on tavoitteena kehittää opiskelijoiden perustelutaitoja. Ylöspäin eriyttäminen tehtävässä onnistuu antamalla opiskelijoille tehtäväksi keksiä, millä kaikilla funktioilla väitteet a-c toteutuvat.

Vastaus:

(a) Joskus. Väite pätee esimerkiksi, kun g on funktion f käänteisfunktio, kun f on identiteettifunktio tai kun g on identiteettifunktio. Väite pätee myös, kun funktioissa f, g esiintyy vain jotakin kommutatiivista operaatiota $(+, \cdot)$. Väite siis pitää paikkaansa esimerkiksi silloin, kun

- $g(x) = 2 + x$ ja $f(x) = 3 + x$,
  jolloin $(g \circ f)(x) = 2 + (3 + x) = 5 + x = 3 + (2 + x) = (f \circ g)(x)$,
  tai kun
- $g(x) = 2x$ ja $f(x) = 3x$, jolloin $(g \circ f)(x) = 2(3x) = 6x = 3(2x) = (f \circ g)(x)$.

(b) Joskus. Väite pätee, kun g on identiteettifunktio.

(c) Joskus. Väite pätee, kun g on funktion f käänteisfunktio.

(d) Aina.

Pohdinta A.9

Tehtävä sopii hyvin sekä ryhmätyöskentelyyn että itsenäiseen työskentelyyn. Tehtävässä on annettu jokaiseen todistusvaiheeseen kaksi vaihtoehtoa, joista opiskelijat valitsevat sopivan vaihtoehdon. Tehtävää voidaan vaikeuttaa tulostamalla kaikki todistusvaiheet erillisille korteille, jolloin opiskelijoilla on jokaiseen todistusvaiheeseen kymmenen eri vaihtoehtoa.

Vastaus:

(a) Koska f on aidosti kasvava, niin $f(x_1) < f(x_2)$ kaikilla $x_1 < x_2$. Tällöin, koska g on aidosti kasvava, niin $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ kaikilla $x_1 < x_2$ eli $g \circ f$ on aidosti kasvava.

(b) Koska f on aidosti vähenevä, niin $f(x_1) > f(x_2)$ kaikilla $x_1 < x_2$. Tällöin, koska g on aidosti vähenevä, niin $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ kaikilla $x_1 < x_2$ eli $g \circ f$ on aidosti kasvava.

D.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

Pohdinta B.1

Tehtävä on pohjaa vahvasti aiemmin opittuun asiaan, ja neljä ensimmäistä kysymystä ovat lähinnä kertaavia kysymyksiä. Näiden kysymysten avulla voidaan hyvin arvioida sitä, kuinka hyvin aiemmin opitut asiat ovat hallussa. Opiskelijoita voi haastaa pyytämällä heitä selittämään viidennessä kysymyksessä, miksi jaksojen pituudet vaihtelevat. Kahdeksannessa kysymyksessä opiskelijat voivat tarkastaa vastauksensa GeoGebran sijasta opettajalta, jolloin opettaja voi antaa heille tarvittaessa vinkkejä uutta arvausta varten. Opettaja voi pohdinnan lopuksi vielä yhteenvetona selittää, kuinka yhdistetyn funktion derivaattafunktiossa näkyvät sekä sisäfunktion muutosnopeus että ulkofunktion muutosnopeus.

Vastaus:

1. $\frac{2\pi}{a}$
2. $\frac{2\pi}{a}$
3. Funktion $f'(x)$ suurin arvo on a ja pienin arvo on $-a$.
4. $h(x) = a$
5. Funktioiden $g(x)$ ja $g'(x)$ jakson pituudet vaihtelevat.
6. Funktiolla $g'(x)$ ei ole suurinta arvoa eikä pienintä arvoa.
7. $h(x) = 2x$
8. $g'(x) = 2x\cos(x^2)$
9. $g'(x) = 2x\cos(x^2) = s'(x)u'(s(x))$

Pohdinta B.5

Seuraavan pohdinnan tarkoituksena on saada opiskelijat pohtimaan tarkemmin ulko- ja sisäfunktion valisemista. Pohdinta sopii toteutettavaksi esimerkiksi pienissä ryhmissä. Toisessa kohdassa tehtävää voidaan eriyttää alaspäin kertomalla opiskelijoille etukäteen, kumman vastauksessa virhe esiintyy. Tämän toki pitäisi olla selvää jo ensimmäisen kohdan perusteella.

Vastaus:

1. Rauha ei muistanut, kuinka polynomi derivoidaan, vaan tulkitsi polynomin yhdistetyksi funktioksi.
2. Otto on derivoinut ulkofunktion $u(x) = \sin(3x+5)$ virheellisesti. Hän ei ole ottanut huomioon, että hänen valitsemansa ulkofunktio on yhdistetty funktio, jolloin se tulisi derivoida yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla.

Pohdinta B.8

Tehtävän tarkoituksena on monipuolistaa opiskelijoiden käsitystä siitä, millaisilla tavoilla yhdistetyn funktion derivaatta voidaan laskea ja monipuolistaa opiskelijoiden henkilökohtaisia ratkaisumenetelmien repertuaareja. Pohdinnassa voi pyytää opiskelijoita esittämään heidän yhdessä tai yksin luomia algoritmejä toisille opiskelijoille. Näin voidaan vertailla opiskelijoiden algoritmeja ja herättää keskustelua esimerkiksi siitä, voidaanko keksiä vielä muun laisia algoritmeja yhdistetyn funktion derivointiin.

Vastaus:

1. Derivoi sisäfunktio (sisin funktio).

2. Sulje derivoitu sisäfunktio ja derivoi seuraavaksi sisin funktio.
3. Toista edellistä kohtaa, kunnes koko funktio on derivoitu.
4. Kerro kaikki funktioiden derivaatat keskenään ja sievennä vastaus.

D.3 Juurifunktion derivaatta

Pohdinta C.3

Nelijuurifunktion derivointisäännön todistamisessa harjoitellaan eri todistusvaiheiden yhteyksien ymmärtämistä. Opettajan on hyvä kysyä opiskelijoilta tarkentavia kysymyksiä siitä, miksi edellisestä kohdasta seuraa seuraava kohta. Opettaja voi esimerkiksi pyytää opiskelijoita selittämään, miksi todistuksen ensimmäisestä kohdasta seuraa, että $(f \circ g)(x) = x$. Kun todistuspolun vaiheiden logiikka on hallussa, on opiskelijoiden helpompi todistaa derivointisääntö yleiselle juurifunktiolle. Pohdinnassa on hyvä myös miettiä opiskelijoiden kanssa sitä, miksi x:n ja n:n arvot on rajattu positiivisiksi.

Vastaus:

Osa 1

1. Olkoon $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}$ ja $f(x) = x^2$.
2. Nyt $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$.
3. Koska $\mathrm{D}\,x = 1$, saadaan ketjusäännöllä, että $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 1$.
4. Edellisestä kohdasta saadaan $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.
5. Koska $f'(x) = \mathrm{D}\,x^2 = 2x$, niin $g'(x) = \frac{1}{2(g(x))}$.
6. Näin ollen $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Osa 2

1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, $x > 0$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ja $f(x) = x^n$.
2. Nyt $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$.
3. Koska $\mathrm{D}\,x = 1$, saadaan ketjusäännöllä, että $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 1$.
4. Edellisestä kohdasta saadaan $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.
5. Koska $f'(x) = \mathrm{D}\,x^n = nx^{n-1}$, niin $g'(x) = \frac{1}{n(g(x))^{n-1}}$.
6. Näin ollen $g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.

Pohdinta C.6

Tämä pohdinta voidaan suorittaa myös parityönä siten, että opiskelijoille ei anneta Katrin ja Laurin valmiita vastauksia, vaan heille annetaan kummallekin omat derivointisäännöt, joiden avulla he voivat itse tuottaa Katrin ja Laurin ratkaisuja vastaavat ratkaisut. Kun derivoinnit on suoritettu, voidaan pohtia sitä, ovatko vastaukset samat.

Vastaus: Molemmat ovat oikeassa, sillä

$$\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}.$$

Pohdinta C.7

Pohdinnassa on tärkeää miettiä, miksi derivaattafunktiota ei ole määritelty kummassakaan tapauksessa, kun $x = 0$. Lisäksi voidaan miettiä, mitkä ovat määrittelyjoukko ja arvojoukko, kun juuren aste $n = 1$. Samalla opiskelijoille voi myös mainita, että usein juurifunktio määritellään siten, että $n = 2, 3, 4, \ldots$. Syitä tähän voidaan miettiä esimerkiksi kuvaajia vertailemalla.

Vastaus:

	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	
	$n = 2, 4, 6, \ldots$	$n = 3, 5, 7, \ldots$
funktion $f(x)$ suurin mahdollinen määrittelyjoukko	$x \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
funktion $f(x)$ arvojoukko	$f(x) \geq 0$	$f(x) \in \mathbb{R}$
funktion $f'(x)$ suurin mahdollinen määrittelyjoukko	$x > 0$	$x \neq 0$
funktion $f'(x)$ arvojoukko	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$

E Tehtävien vastaukset

1.

(a) 3

(b) -3

(c) -3

(d) 5

2.

(a) $h(x) = \frac{1}{x+2}$ ja $i(x) = \frac{1}{x} + 2$

(b) $h : x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ja $i : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) On, kun $x = -1$.

3.

(a) Aidosti vähenevä. Olkoon $x_1 < x_2$. Tällöin $f(x_1) < f(x_2)$ ja $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ eli $(g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$.

(b) Ei muutu. Yhdistetty funktio on edelleen aidosti vähenevä.

4.

$$h \circ (g \circ f) = h \circ (g(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(x)) \circ f = (h \circ g) \circ f.$$

5.

$f'(x) = 3x^2 \sin(\cos(x^3)) \sin(x^3)$

6.

Tapa 1 Derivaattafunktiolla $f'(x) = 3x^2 - 30x + 77$ ei ole nollakohtia. Koska $f'(0) = 77$ ja $f'(x)$ on kaikkialla jatkuva, niin $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen funktio $f(x)$ on aidosti kasvava.

Tapa 2 Pohdinnassa A.9 osoitettiin, että aidosti kasvavien funktioiden yhdistetty funktio on aidosti kasvava. Koska $x-5$, x^3 ja $2x$ ovat kaikki aidosti kasvavia, niin myös niiden yhdistetty funktio $f(x)$ on aidosti kasvava.

7.

(a) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ tai $x = \frac{7\pi}{4}$.

(b) $f(x)$ on kasvava väleillä $[0, \frac{\pi}{4}]$ ja $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$.

(c) Suurin arvo on $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ ja pienin arvo on $f(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$.

8.

(a) Joskus. Väite ei päde esimerkiksi silloin, kun $g(x) = -x$ ja $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Aina. Aidosti kasvavien funktioiden yhdistetty funktio on aidosti kasvava.

(c) Joskus. Väite ei päde, kun $f(x)$ on vakiofunktio.

9.

(a) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}$, $x < 0$.

(b) $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(2+x^2)^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.

Funktion $f(x)$ pienin arvo on $f(-1) = f(5) = 0$ ja suurin arvo on $f(2) = 3$.

11.

Nyt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Koska $\sqrt{x} > 0$ kaikilla $x > 0$ ja positiivisten lukujen osamäärä on positiivinen, niin $f'(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Näin ollen $f(x) = \sqrt{x}$ on aidosti kasvava.

12.

(a) $(f \circ g)(x) = \sqrt[q]{x^p}$

(b) $(f \circ g)'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

(c) $\mathrm{D}\, x^r = rx^{r-1}$, missä $x > 0$ ja $r \in \mathbb{Q}$.